TROISIEME
Cours de Mathématiques

Math-Performance 2006-2007

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

TABLE DES MATIERES

Math-Performance

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

Avant propos

Vous trouverez dans cet ouvrage édité par Math Performance, le cours complet de Quatrième conforme au programme officiel de l'éducation nationale.

Vous pouvez télécharger ou imprimer ce cours pour une utilisation privée ou collective uniquement

Math-Performance

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

Chapitre 1
Développement - Factorisation

1. Rappels

Simple distribution

Si k, a et b sont trois nombres on a la relation :

$$\underbrace{k(a+b)}_{\text{Forme factorisée}} = \underbrace{ka+kb}_{\text{Forme développée}}$$

Vocabulaire

- Quand on passe de la forme factorisée à la forme développée on dit que l'on développe en distribuant k sur a et b.
- Quand on passe de la forme développée à la forme factorisée on dit que l'on factorise en mettant k en facteur.

Exemples

1. Développement :

$-3(2x\ -5) = -6x + 15$

2. Factorisation :

$4x^2 - 2x = 2x(2x - 1)$

Double distribution

Si a, b, c et d sont quatre nombres on a la relation :

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

En $3^{\text{ème}}$ on utilise cette relation uniquement pour développer.

Exemple

$A = (x - 5)(-3x + 4)$

$A = -3x^2 + 4x + 15x - 20$

Pour terminer on réduit (on regroupe tous les termes en x^2, x, etc.)

$A = -3x^2 + 19x - 20$

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

2. Factorisation avec des «blocs»

Méthode

On peut utiliser la relation $ka + kb = k(a+b)$ avec des «blocs».
Un «bloc» est une somme de termes (2 en général) entre parenthèses comme par exemple $(3x-4)$.

Exemples

1) On se propose de factoriser $A = (x-5)(x+2) + (x-5)(2x+9)$

On recherche un facteur commun, c'est le «bloc» $(x-5)$ qui va jouer le rôle de k. On met donc $(x-5)$ en facteur :

$A = (x-5)\,[(x+2) + (2x+9)]$

Ensuite on réduit à l'intérieur du crochet :

$A = (x-5)(x+2+2x+9)$

$A = (x-5)(3x+11)$

On vient d'obtenir la forme factorisée de A.

2) Factorisation de $B = (3x-2)^2 - (x+7)(3x-2)$

On factorise sur le modèle $k^2 - ka = k(k-a)$, où k est le «bloc» $(3x-2)$ et a est le «bloc» $(x+7)$.

$B = (3x-2)\,[(3x-2) - (x+7)]$

Quand on réduit dans le crochet on fait attention à $-(x+7)$ qui devient $-x-7$.

$B = (3x-2)(3x-2-x-7)$

$B = (3x-2)(2x-9)$

C'est la forme factorisée de B.

3. Egalités remarquables

Relations

On considère deux nombres a et b, alors on a les relations :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Double produit

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Ces 3 relations permettent de développer et factoriser.

Exemples de développements

1) $A = (4x-3)^2 = 16x^2 - 24x + 9$

$(4x)^2$ $2 \times 4x \times 3$ 3^2

2) $B = (x+5)^2 - (3x+2)(x-1)$

On développe $(x+5)^2$ avec une égalité remarquable et $(3x+2)(x-1)$ avec la deuxième relation de développement du paragraphe de rappels.

$B = x^2 + 10x + 25 - (3x^2 - 3x + 2x - 2)$

Le $-$ porte sur l'ensemble du développement qui est mis entre parenthèses

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

$B = x^2 + 10x + 25 - 3x^2 + 3x - 2x + 2$

On réduit :

$B = -2x^2 + 11x + 27$

3) $C = (4x - 3)(4x + 3)$

On utilise la 3ème égalité remarquable.

$C = \underbrace{16x^2}_{(4x)^2} - \underbrace{9}_{3^2}$

Exemples de factorisations

En général les factorisations sont basées sur la 3ème égalité remarquable.

1) $A = x^2 - 25$

$A = x^2 - 5^2 = (x + 5)(x - 5)$

2) $B = 9x^2 - 16$

$B = (3x)^2 - 4^2 = (3x + 4)(3x - 4)$

On peut aussi appliquer cette méthode avec des «blocs».

3) $C = (x + 1)^2 - 9$

$C = (x + 1)^2 - 3^2$

$C = [(x + 1) + 3]\,[(x + 1) - 3]$

$C = (x + 4)(x - 2)$

4) $D = (3x - 2)^2 - (x + 7)^2$

$D = [(3x - 2) + (x + 7)]\,[(3x - 2) - (x + 7)]$

$D = (3x - 2 + x + 7)(3x - 2 - x - 7)$

$D = (4x + 5)(2x - 9)$

4. Produit de facteurs nul

Propriété

Un produit de facteurs est de la forme :

$$a \times b \times c \times \ldots$$

Pour que ce produit soit nul il faut qu'au moins un des facteurs soit nul.

Exemple

Résolution de l'équation : $(4x + 5)(3x - 2) = 0$

Il s'agit du produit de 2 facteurs (les facteurs sont les «blocs» $(4x + 5)$ et $(3x - 2)$).

Pour que le produit soit nul il faut avoir :

$4x + 5 = 0 \quad$ ou $\quad 3x - 2 = 0$

$4x = -5 \quad$ ou $\quad 3x = 2$

$x = \dfrac{-5}{4} \quad$ ou $\quad x = \dfrac{2}{3}$

Donc l'équation possède 2 solutions : $\dfrac{-5}{4}$ et $\dfrac{2}{3}$

Math-Performance

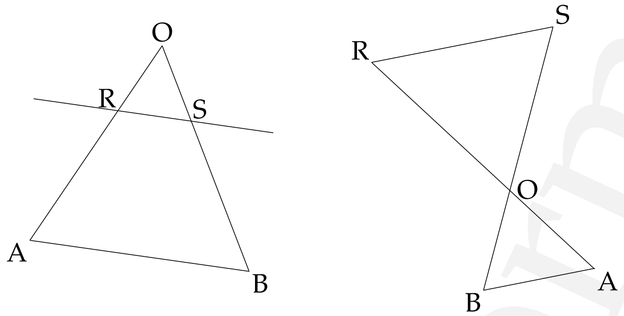
Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

Chapitre 2
Propriété de Thalès

1. Propriété directe

Propriété

On considère les 2 cas de figure suivants :



Dans lesquels on a les droites (RS) et (AB) qui sont parallèles.

Alors on a les relations :

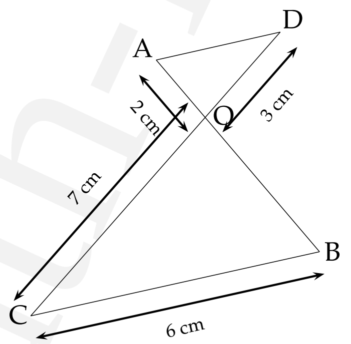
$$\frac{OR}{OA} = \frac{OS}{OB} = \frac{RS}{AB} \qquad \text{et} \qquad \frac{OA}{OR} = \frac{OB}{OS} = \frac{AB}{RS}$$

Remarque

On peut interpréter la propriété de Thalès en terme d'agrandissement/réduction, par exemple sur les figures ci-dessus le triangle ORS est une réduction du triangle OAB donc les rapports entre les côtés se correspondant sont identiques.

Exemple

On considère le quadrilatère croisé $ABCD$ représenté ci-dessous :



On suppose que (AD) et (BC) sont parallèles.

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

Calculons AD et OB

Dans le quadrilatère croisé $ABCD$, (AD) et (BC) sont parallèles donc on a d'après la propriété de Thalès :

Ce que l'on cherche

$$\frac{AD}{CB} = \frac{OD}{OC}$$

Connu

Rapport connu

On remplace les longueurs connues par leurs valeurs :

$\frac{AD}{6} = \frac{3}{7}$ donc $AD = 6 \times \frac{3}{7} = \boxed{\frac{18}{7}}$

Pour calculer OB on procède de la même façon :

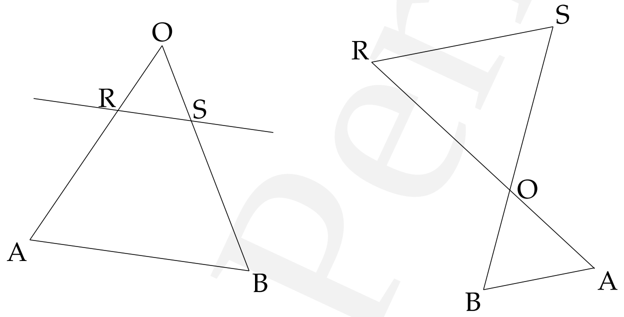
$\frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OD}$

$\frac{OB}{2} = \frac{7}{3}$ donc $OB = 2 \times \frac{7}{3} = \boxed{\frac{14}{3}}$

2. Propriété réciproque

Propriété

On considère les 2 cas de figure suivants :



Dans lesquels **on ne sait pas** si les droites (RS) et (AB) sont parallèles.

Pour le savoir on calcule $\frac{OR}{OA}$ et $\frac{OS}{OB}$.

- Si les deux rapports sont égaux alors (RS) et (AB) sont parallèles.
- Si les deux rapports sont différents alors (RS) et (AB) ne sont pas parallèles.

Remarque

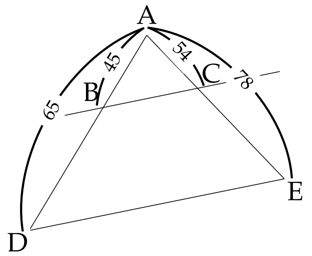
On peut aussi travailler avec $\frac{OA}{OR}$ et $\frac{OB}{OS}$, en revanche les rapports $\frac{RS}{AB}$ et $\frac{AB}{RS}$ ne sont pas utilisables.

Math-Performance

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

Exemples

1. On considère le triangle ADE représenté ci-dessous :



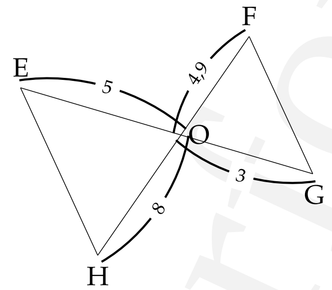
Pour savoir si (BC) et (DE) sont parallèles on calcule :

$\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{65}{45} = \dfrac{13}{9}$

$\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{78}{54} = \dfrac{13}{9}$

Donc $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$, ce qui prouve d'après la réciproque de la propriété de Thalès que (BC) et (DE) sont parallèles.

2. On considère la figure suivante :



Pour savoir si (EH) et (FG) sont parallèles on calcule :

$\dfrac{OE}{OG} = \dfrac{5}{3} \simeq 1{,}66$

$\dfrac{OH}{OF} = \dfrac{8}{4{,}9} = \dfrac{80}{49} \simeq 1{,}63$

Donc $\dfrac{OE}{OG} \neq \dfrac{OH}{OF}$ ce qui prouve d'après la propriété de Thalès que (EH) et (FG) ne sont pas parallèles.

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

Chapitre 3
Racine carrée

1. Introduction

Définition

On considère seulement des nombres positifs.
On cherche à résoudre une équation du type $x^2 = a$.

Premier cas : a est le carré d'un nombre (entier, décimal ou fraction).

Exemples :

a) $x^2 = 9$; la solution de l'équation est $x = 3$

b) $x^2 = 0{,}16$; la solution de l'équation est $x = 0{,}4$.

c) $x^2 = \frac{25}{36}$; la solution de l'équation est $x = \frac{5}{6}$

On dit que 3 est la racine carrée de 9;
on dit que 0,4 est la racine carrée de 0,16;
on dit que $\frac{5}{6}$ est la racine carrée de $\frac{25}{36}$.

Deuxième cas : a n'est pas le carré d'un nombre.

On ne peut pas trouver de nombre entier, décimal ou fraction qui soit solution de $x^2 = a$. Donc on «invente» un nouveau nombre que l'on note $\sqrt{a}$ qui est la solution de cette équation.

On dit que $\sqrt{a}$ est la racine carrée de a et on a : $\sqrt{a}^2 = a$

Exemple : La solution de l'équation $x^2 = 7$ est $x = \sqrt{7}$.

2. Règles de calcul

Règle de base

Si a est un nombre positif on a : $\boxed{\sqrt{a}^2 = a \quad \text{et} \quad \sqrt{a^2} = a}$

Règle de «Simplification»

Si a et k sont deux nombres positifs : $\boxed{\sqrt{k^2 a} = k\sqrt{a}}$

Exemples

a) $\sqrt{5}^2 = 5$

b) $\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$

c) $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$

Pour faire ce calcul, on a écrit 18 sous la forme d'un produit dont un facteur est un carré pour pouvoir appliquer la relation $\sqrt{k^2 a} = k\sqrt{a}$.

d) $5\sqrt{72} = 5\sqrt{36 \times 2} = 5\sqrt{6^2 \times 2} = 5\times 6\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$

ATTENTION : Ici c'est une multiplication

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

e) $A = \sqrt{75} - 3\sqrt{48} + 2\sqrt{3}$

1$^{\text{ère}}$ étape : On simplifie chaque terme.

$A = \sqrt{25 \times 3} - 3\sqrt{16 \times 3} + 2\sqrt{3}$

$A = \sqrt{5^2 \times 3} - 3\sqrt{4^2 \times 3} + 2\sqrt{3}$

$A = 5\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$

2$^{\text{ème}}$ étape : On réduit.

$A = -5\sqrt{3}$

Règle de «multiplication»

Si a et b sont deux nombres positifs on a : $\boxed{\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}}$

Exemples

a) $\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{3 \times 12} = \sqrt{36} = 6$

b) $5\sqrt{2} \times 7\sqrt{6} = 5 \times 7 \times \sqrt{2}\sqrt{6} = 35\sqrt{2 \times 6} = 35\sqrt{12}$

On peut simplifier ce dernier résultat :

$35\sqrt{12} = 35\sqrt{4 \times 3} = 35\sqrt{2^2 \times 3} = 35 \times 2\sqrt{3} = 70\sqrt{3}$

Règle de «division»

Si a et $b \neq 0$ sont deux nombres positifs on a : $\boxed{\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$

Exemples

a) $\sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{45}{5}} = \sqrt{9} = 3$

Remarque

Il n'y a pas de règle d'addition (ou de soustraction), par exemple en général $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ voici un exemple pour s'en convaincre :
$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ alors que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

Exemples supplémentaires

a) $A = (1+\sqrt{5})^2$

Pour effectuer ce calcul on utilise l'identité remarquable :
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$A = (1+\sqrt{5})^2 = 1^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{5} + \sqrt{5}^2 = 1 + 2\sqrt{5} + 5 = 6 + 2\sqrt{5}$

b) $B = (\sqrt{7} - 3)^2$

Pour effectuer ce calcul on utilise l'identité remarquable :
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

$B = (\sqrt{7} - 3)^2 = \sqrt{7}^2 - 2 \times \sqrt{7} \times 3 + 3^2 = 7 - 6\sqrt{7} + 9 = 16 - 6\sqrt{7}$

c) $C = (7\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 = (7\sqrt{5})^2 - 2 \times 7\sqrt{5} \times \sqrt{3} + \sqrt{3}^2$

$C = 7^2 \times \sqrt{5}^2 - 14 \times \sqrt{5} \times \sqrt{3} + 3$

$C = 49 \times 5 - 14\sqrt{5 \times 3} + 3$

$C = 245 - 14\sqrt{15} + 3 = 248 - 14\sqrt{15}$

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

d) Soit $D = x^2 - 3x + 5$

Calcul de D pour $x = \sqrt{7} + 2$:

$D = (\sqrt{7} + 2)^2 - 3(\sqrt{7} + 2) + 5$

$D = \sqrt{7}^2 + 4\sqrt{7} + 4 - 3\sqrt{7} - 6 + 5$

$D = 7 + \sqrt{7} + 3$

$D = 10 + \sqrt{7}$

3. Résolution de $x^2 = a$ dans le cas général

Méthode

Premier cas : $a < 0$

Un carré étant toujours positif, il ne peut-être égal à un nombre négatif donc l'équation n'a pas de solution.

Deuxième cas : $a = 0$

L'équation est donc $x^2 = 0$, elle admet une seule solution $x = 0$.

Troisième cas : $a > 0$

Le nombre a admet une racine carrée tel que $\sqrt{a}^2 = a$.
On réécrit l'équation en remplaçant a par $\sqrt{a}^2$:

$x^2 = \sqrt{a}^2$, on transpose :

$x^2 - \sqrt{a}^2 = 0$, on utilise l'égalité $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$:
$(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = 0$
Résoudre cette équation est équivalent à :
$x + \sqrt{a} = 0$ ou $x - \sqrt{a} = 0$
$x = -\sqrt{a}$ ou $x = \sqrt{a}$
Donc l'équation a deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Exemples

a) Résolution de $x^2 = -5$:

Cette équation n'a pas de solution car un carré ne peut-être négatif.

b) Résolution de $x^2 = 11$

Cette équation admet deux solutions : $\sqrt{11}$ et $-\sqrt{11}$.

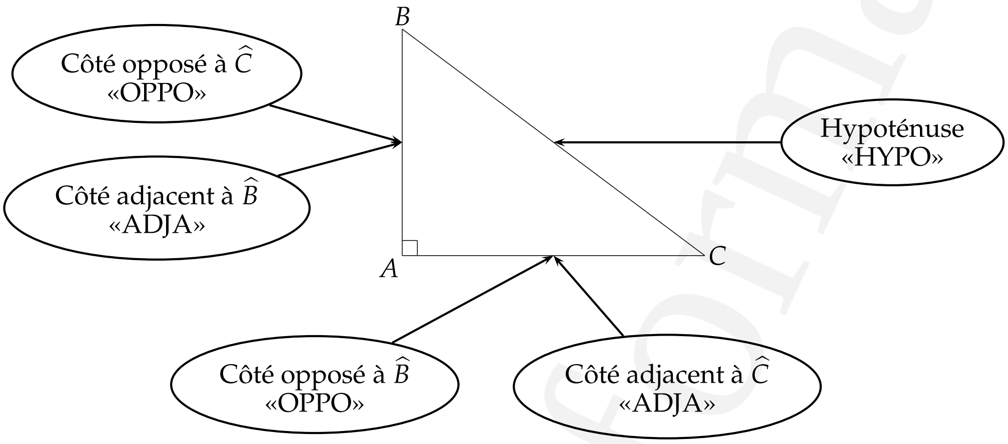
Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

Chapitre 4
Trigonométrie

1. Relations dans le triangle rectangle

Propriété

Soit ABC un triangle rectangle en A.



Alors on a les relations :

$$\sin(\text{Angle}) = \frac{\text{Côté opposé à l'Angle}}{\text{Hypoténuse}} \qquad \text{(Relation du sinus)}$$

$$\cos(\text{Angle}) = \frac{\text{Côté adjacent à l'Angle}}{\text{Hypoténuse}} \qquad \text{(Relation du cosinus)}$$

$$\tan(\text{Angle}) = \frac{\text{Côté opposé à l'Angle}}{\text{Côté adjacent à l'Angle}} \qquad \text{(Relation de la tangente)}$$

Remarque

Un moyen mémotechnique pour retenir ces formules :

S O H C A H T O A

$$\sin = \frac{\text{OPPO}}{\text{HYPO}} \qquad \cos = \frac{\text{ADJA}}{\text{HYPO}} \qquad \tan = \frac{\text{OPPO}}{\text{ADJA}}$$

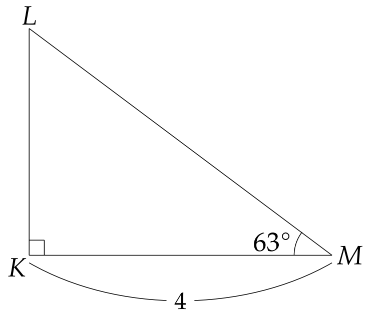
Math-Performance
Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

2. Exemples d'utilisation

Exemple 1

On considère un triangle KLM rectangle en K tel que :

$$\text{mes}(\widehat{M}) = 63° \text{ et } KM = 4 \text{ cm}$$



Calculons LM et LK

Le triangle KLM est rectangle en K donc on a
la relation trigonométrique :

Côté connu adjacent à l'angle$\widehat{M}$

$$\cos(\widehat{M}) = \frac{\text{KM}}{\text{LM}}$$

Angle connu

Hypoténuse cherchée

$$\cos(63°) = \frac{4}{LM} \qquad LM = \frac{4}{\cos(63°)} \simeq 8{,}8 \text{ cm.}$$

On échange

Pour calculer LK, on utilise la tangente :

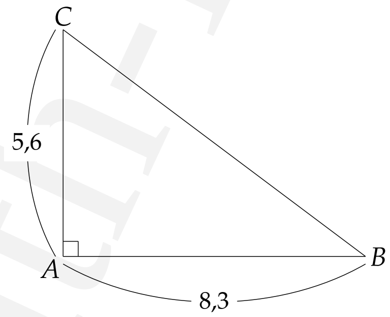
$$\tan(\widehat{M}) = \frac{LK}{KM} \qquad \tan(63°) = \frac{LK}{4} \qquad LK = 4 \times \tan(63°) \simeq 7{,}8 \text{ cm.}$$

On multiplie

Exemple 2

On considère un triangle ABC rectangle en A tel que :

$$AB = 8{,}3 \text{ cm et } AC = 5{,}6 \text{ cm}$$



Calculons mes($\widehat{B}$) et mes($\widehat{C}$)

Dans ABC rectangle en A, on a la relation trigonométrique :

$$\tan(\widehat{B}) = \frac{AC}{AB} \qquad \tan(\widehat{B}) = \frac{5{,}6}{8{,}3} \qquad \text{mes}(\widehat{B}) = \tan^{-1}\left(\frac{5{,}6}{8{,}3}\right) \simeq 34°$$

Pour déterminer mes($\widehat{C}$) on utilise le fait que $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont
complémentaires :

$$\text{mes}(\widehat{C}) = 90 - \text{mes}(\widehat{B}) \simeq 90 - 34 \simeq 56°$$

Math-Performance

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

Chapitre 5
Equations - Inéquations

1. Rappels sur les équations

Exemples

a) Résolution de l'équation $5x - 4 = 4x + 13$

On cherche à «isoler» x en mettant par transposition tous les termes en x dans le membre de gauche et le reste à droite.

$$5x - 4x = 13 + 4$$

Quand on transpose on change le signe

Ensuite on réduit et on trouve :

$$x = 17$$

b) Résolution de l'équation $3x + 10 = 45 - 2x$

On effectue les transpositions pour isoler x :

$$3x + 2x = 45 - 10$$

On réduit :

$$5x = 35$$

Pour trouver x, on doit diviser l'égalité par 5, (attention : à ce niveau il n'y a pas de changement de signe).

$$x = \frac{35}{5} = 7$$

c) Résolution de l'équation $2(9x + 5) - (12 + 9x) = 0$

Pour résoudre ce type d'équation on commence par développer :

$$18x + 10 - 12 - 9x = 0$$

Puis on procède comme dans les exemples précédents :

$$18x - 9x = -10 + 12$$

$$9x = 2$$

$$x = \frac{2}{9}$$

d) Résolution de l'équation $\dfrac{3x + 7}{8} = \dfrac{21 - 5x}{3} + 1$

Pour résoudre ce type d'équation on commence par réduire au même dénominateur :

$$\frac{3(3x + 7)}{24} = \frac{8(21 - 5x)}{24} + \frac{24}{24}$$

Ensuite on peut «chasser» les dénominateurs identiques :

$$3(3x + 7) = 8(21 - 5x) + 24$$

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

On termine la résolution comme dans l'exemple précédent :

$$9x + 21 = 168 - 40x + 24$$
$$9x + 40x = 168 + 24 - 21$$
$$49x = 171$$
$$x = \frac{171}{49}$$

2. Inéquations

Définition

Une inéquation est une inégalité comportant une inconnue (en général représentée par x).
Résoudre une inéquation c'est trouver toutes les valeurs de x qui vérifient l'inégalité.

Exemple

$$4x + 3 < 2x - 1$$

Pour $x = 15$:

- $4x + 3 = 4 \times 15 + 3 = 63$
- $2x - 1 = 2 \times 15 - 1 = 29$

Donc 15 n'est pas solution de l'inéquation.

Pour $x = -3$:

- $4x + 3 = 4 \times (-3) + 3 = -9$
- $2x - 1 = 2 \times (-3) - 1 = -7$

Donc -3 est solution de l'inéquation.

En général une inéquation admet une infinité de solutions.

Méthode

Pour trouver toutes les solutions d'une inéquation on utilise :

- La transposition, pour «isoler» x dans le membre de gauche.
- La division, mais Attention : **Quand on divise une inégalité par un nombre négatif on doit changer son sens.**

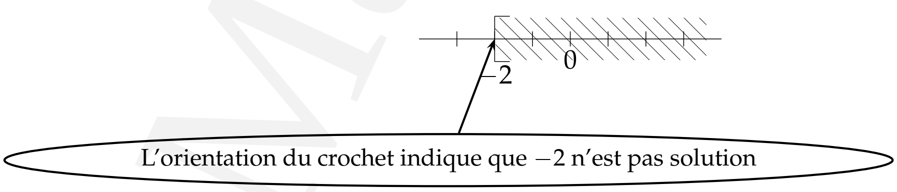
On représente habituellement l'ensemble des solutions sur une droite graduée.

Exemples

a) Résolution de $4x + 3 < 2x - 1$:

$$4x - 2x < -1 - 3$$
$$2x < -4$$
$$x < \frac{-4}{2}$$
$$x < -2$$

Donc tous les nombres inférieurs à -2 (-2 non compris) sont solutions de l'inéquation. On représente l'ensemble des solutions sur une droite graduée :



L'ensemble des solutions est représenté par la partie non hachurée.

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

b) Résolution de l'inéquation : $5x - 3 \geq 7x + 4$

$$5x - 7x \geq 4 + 3$$

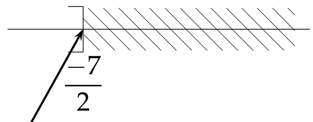
$$-2x \geq 7$$

On divise par -2, donc on change le sens

$$x \leq \frac{7}{-2}$$

$$x \leq \frac{-7}{2}$$

Représentons l'ensemble des solutions sur une droite graduée :



L'orientation du crochet indique que $\frac{-7}{2}$ est solution

L'ensemble des solutions est représenté par la partie non hachurée.

Math-Performance

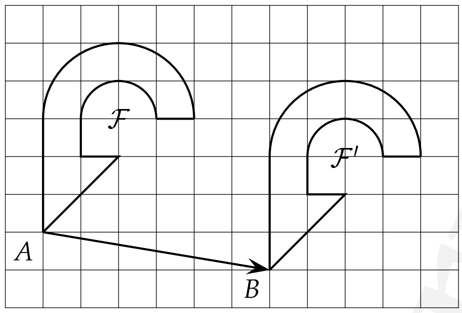
Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

Chapitre 6
Vecteurs - Translations

1. Rappel

Définition

Sur le dessin ci-dessous $\mathcal{F}'$ est l'image de $\mathcal{F}$ par une <u>translation</u> :



Dans une translation la figure est «glissée» en conservant son orientation.

Sur la figure ci-dessus la translation peut être définie de 2 façons différentes :

- c'est la translation qui transforme A en B,
- c'est la translation définie par la flèche qui représente un <u>vecteur</u>.

2. Vecteur

Définition

Un vecteur est défini par :

- une direction,
- une longueur,
- un sens.

On représente un vecteur par une flèche.

On peut aussi définir un vecteur par deux points qui indiquent le point de départ et le point d'arrivée et d'une flèche représentant le vecteur.

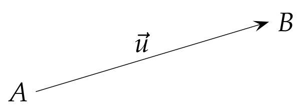
Dans tous les cas le nom d'un vecteur est écrit avec une flèche au dessus comme dans l'exemple qui suit.

<u>Exemple</u>

Représentation du vecteur $\vec{u}$ ou $\overrightarrow{AB}$

Départ de la flèche

Arrivée de la flèche



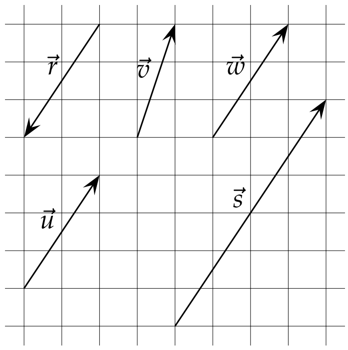
Math-Performance

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

Vecteurs égaux

Plusieurs «flèches» différentes peuvent représenter le même vecteur à condition qu'elles aient la même direction, la même longueur et le même sens. Ce sont des vecteurs égaux.

Exemple



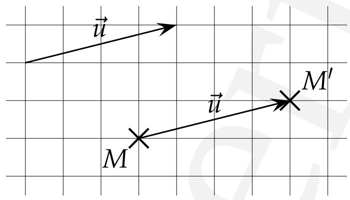
Comparaison au vecteur $\vec{u}$:

Le vecteur $\vec{v}$ n'a pas la même direction donc il n'est pas égal à $\vec{u}$.
Le vecteur $\vec{s}$ a la même direction mais pas la même longueur donc il n'est pas égal à $\vec{u}$.
Le vecteur $\vec{r}$ a la même direction, la même longueur mais pas le même sens donc il n'est pas égal à $\vec{u}$
Le vecteur $\vec{w}$ a la même direction, la même longueur et le même sens donc il est égal à $\vec{u}$ et on peut écrire $\vec{u} = \vec{w}$.

Vecteur et translation

Soit $\vec{u}$ un vecteur.
L'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ est le point M' tel que :

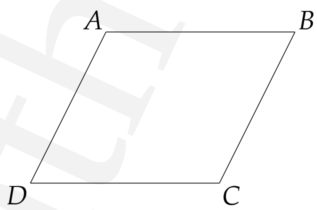
$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}.$$



3. Vecteur et parallélogramme

Propriété

• Si $ABCD$ est un parallélogramme



alors on a les égalités de vecteurs :

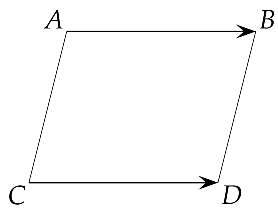
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ $\quad$ $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$ $\quad$ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

Math-Performance

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

• Si A, B, C et D sont 4 points tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors on peut affirmer que $AB\underline{D}C$ est un parallélogramme.



Remarques

1. La propriété du parallélogramme peut aussi s'exprimer en terme de milieux en utilisant le fait qu'un parallélogramme est caractérisé par des diagonales qui ont le même milieu :

• Si deux segments $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu alors on a les égalités de vecteurs :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ $\quad$ $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$ $\quad$ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

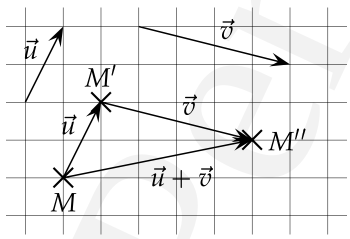
• Si A, B, C et D sont 4 points tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors on peut affirmer que $[A\underline{D}]$ et $[BC]$ ont le même milieu.

2. Ecrire $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ est équivalent à dire que la translation qui transforme A en B, transforme aussi C en D.

4. Somme de vecteurs

Définition

On fait subir à un point M deux translations successives de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,
on obtient le point M''.



Le vecteur $\overrightarrow{MM''}$ est la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ que l'on note $\vec{u} + \vec{v}$.

On a aussi la relation :

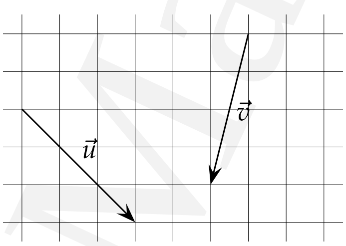
$$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''}$$

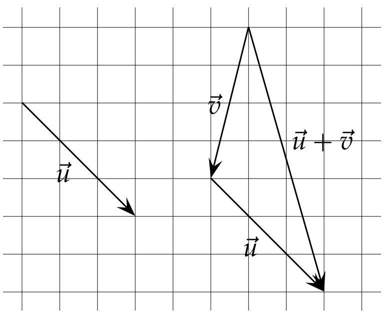
appelée relation de Chasles.

Méthodes de construction

Première méthode : «Bout à bout»

Pour additionner les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ci-dessous, on reproduit le vecteur $\vec{u}$ au «bout» de $\vec{v}$ et on trace le vecteur somme en partant de l'origine de $\vec{v}$ vers l'extrêmité de $\vec{u}$.



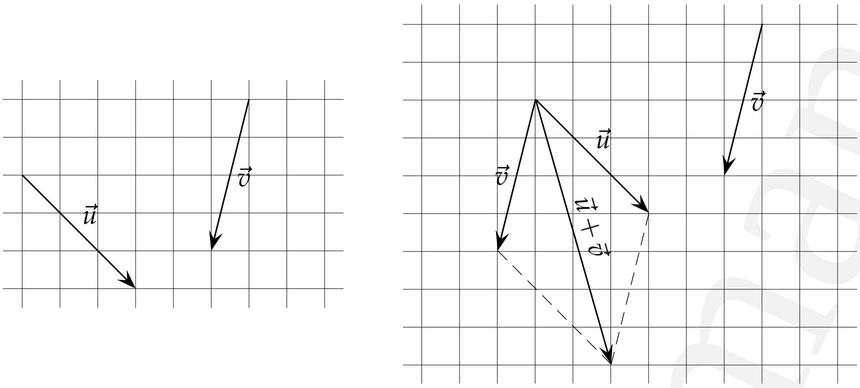


Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

Deuxième méthode : «parallélogramme»

Pour additionner les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ci-dessous :

- on reproduit le vecteur $\vec{v}$ de tel façon que son origine coïncide avec celle de $\vec{u}$,
- on forme le parallélogramme à partir de ces deux vecteurs,
- on trace le vecteur somme en construisant la diagonale du parallélogramme partant de l'origine commune des vecteurs.



Remarque

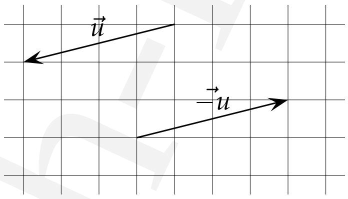
Dans les exercices on utilise la méthode la plus pratique selon la disposition initiale des vecteurs.

Vecteur nul

- Tout point du plan représente un vecteur nul noté $\vec{0}$ ou $\overrightarrow{AA}$ si A est le point en question,
- un vecteur nul n'a ni direction ni sens, sa longueur est 0,
- si A et B sont deux points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, alors on peut affirmer que A et B sont confondus.

Vecteur opposé

- Le vecteur opposé à un vecteur $\vec{u}$ est le vecteur de même direction, même longueur et de sens inverse, on le note $-\vec{u}$,
- le vecteur opposé de $\overrightarrow{AB}$ est $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$,
- la somme de deux vecteurs opposés donne le vecteur nul, en particulier $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$



5. Deux symétries centrales successives

Propriété

Soient O et I, deux points distincts et $\mathcal{F}$ une figure du plan.

On fait subir à $\mathcal{F}$, la symétrie de cente O, on obtient la figure $\mathcal{F}'$.

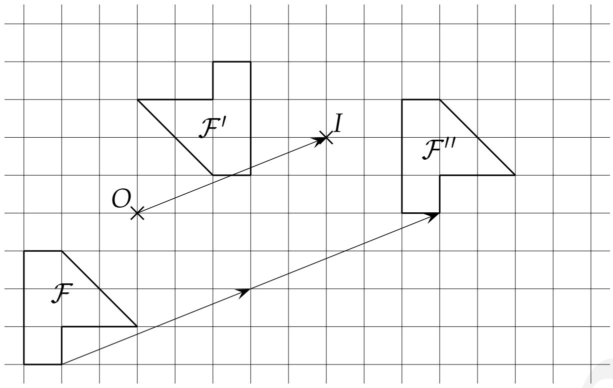
On fait subir à la figure $\mathcal{F}'$, la symétrie de centre I, on obtient $\mathcal{F}''$.

Alors on peut passer directement de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}''$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OI}$.

Math-Performance

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

Exemple



Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

Chapitre 7
Arithmétique

Tous les nombres qui interviennent dans ce chapitre sont des nombres entiers positifs.

1. Divisibilité

Définition

Soit a un nombre, on dit que a est divisible par d, si la division de a par d donne un quotient entier exact.

Vocabulaire

Le nombre 45 est divisible par 5 car $45 \div 5 = 9$.

On dit que 45 est un multiple de 5.

On dit que 5 est un diviseur de 45.

Méthode

Pour savoir si un nombre est divisible par un nombre donné sans poser la division on peut utiliser les critères de divisibilité.

Divisibilité par	Critère
2	Le nombre se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8
3	La somme des chiffres du nombre doit être multiple de 3
4	Le nombre constitué par les 2 derniers chiffres doit être multiple de 4
5	Le nombre doit se terminer par 0 ou 5
6	Le nombre doit être à la fois divisible par 2 et 3
9	La somme des chiffres du nombre doit être multiple de 9
10	Le dernier chiffre du nombre doit être 0

Exemples

a) 4572 est un multiple de 3
car $4 + 5 + 7 + 2 = 18$ est un multiple de 3.

b) 13712 est un multiple de 4
car 12 est un multiple de 4.

c) 2370 est un multiple de 6
car c'est un nombre pair et $2 + 3 + 7 = 12$ est un multiple de 3.

2. Diviseurs communs - P.G.C.D.

Définition

Soient a et b deux nombres.
On dit que d est un diviseur commun de a et b si d divise à la fois a et b.

Exemple

Recherche des diviseurs communs de 20 et 12 :

On écrit tous les diviseurs de 20 :
1 2 4 5 10 20

On écrit tous les diviseurs de 12 :
1 2 3 4 6 12

Conclusion : les nombres 20 et 12 ont 3 diviseurs communs : 1, 2 et 4.

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

Vocabulaire

- Le plus grand diviseur commun à deux nombres s'appelle le P.G.C.D.
- Le nombre 1 est toujours diviseur commun de deux nombres, lorsque c'est le seul on dit que les nombres sont premiers entre eux.

Exemples

1. Le P.G.C.D. de 20 et 12 est 4 et on écrit : PGCD(20;12)=4

2. Les nombres 25 et 9 sont premiers entre eux, en effet ils n'ont pas d'autre diviseur commun que 1, on peut écrire : PGCD(25;9)=1

3. Calcul du P.G.C.D.

Lorsque les nombres sont «grands», on ne peut pas lister tous les diviseurs, donc il faut trouver le P.G.C.D. par une autre méthode.

Principe

Le P.G.C.D. de deux nombres est le même que le P.G.C.D. d'un des deux nombres et de leur différence.

Exemples

1. Calcul du P.G.C.D. de 20 et 12 :

Le P.G.C.D. de 20 et 12 est le même que le P.G.C.D. de 12 (le plus petit) et de 8 (la différence 20-12) :

PGCD(20;12)=PGCD(12;8)

Le P.G.C.D. de 12 et 8 est le même que le P.G.C.D. de 8 (le plus petit) et de 4 (la différence 8-4) :

PGCD(12;8)=PGCD(8;4)

Enfin en recommençant une dernière fois le même principe on obtient :

PGCD(8;4)=PGCD(4;4)=4, donc le P.G.C.D. de 20 et 12 est 4.

2. Calcul du P.G.C.D. de 702 et 494 :

Le plus petit — Différence $702 - 494$

PGCD(702;494) = PGCD(494;208)
PGCD(208;286)
PGCD(208;78)
PGCD(78;130)
PGCD(78;52)
PGCD(52;26)
PGCD(26;26) = 26

Remarque

La méthode précédente s'appelle la méthode des soustractions successives.
Il existe une autre méthode toujours basée sur le même principe appelée méthode d'Euclide et qui utilise les divisions Euclidiennes :

Le plus petit — Reste de la division $702 \div 494$

PGCD(702;494) = PGCD(494;208)
PGCD(208;78)
PGCD(78;52)
PGCD(52;26)
PGCD(26;0) = 26

Cette dernière méthode est un peu plus difficile à mettre en oeuvre, mais permet en général de «gagner» des étapes.

Math-Performance

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

4. Applications

Simplification de fraction

Pour obtenir une fraction irréductible il suffit de la simplifier par le P.G.C.D. de son numérateur et de son dénominateur.

Exemple

Simplification de $\dfrac{702}{494}$.

Le P.G.C.D. de 702 et 494 est 26 (exemple précédent), pour obtenir la fraction irréductible on simplifie par 26 :

$\dfrac{702}{494} = \dfrac{\cancel{26} \times 27}{\cancel{26} \times 19} = \dfrac{27}{19}$

Résolution de problème

Exemple

Marc a 108 billes rouges et 135 billes noires.
Il veut faire des paquets de sorte que :

- tous les paquets contiennent le même nombre de billes rouges,
- tous les paquets contiennent le même nombre de billes noires,
- toutes les billes rouges et les billes noires sont utilisées.

Quel nombre maximal de paquets pourra-t-il réaliser ?

Imaginons que Marc commence par partager séparément les billes rouges et les billes noires :

- Il utilise toutes les billes rouges donc le nombre de paquets de billes rouges est un diviseur de 108.
- Il utilise toutes les billes noires donc le nombre de paquets de billes noires est un diviseur de 135.

Comme il doit assembler les paquets de billes rouges et noires, le nombre de paquets de billes rouges et de billes noires doit être identique. Par conséquent ce nombre de paquets est un diviseur commun à 108 et 135. Si de plus Marc veut un maximum de paquets il doit partager les billes en PGCD(108;135)=27 paquets.

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

Chapitre 8
Géométrie analytique

1. Rappels

Repérage

Pour repérer un point dans le plan on utilise un repère.
Un repère est défini par trois points non alignés (en général O, I et J) :

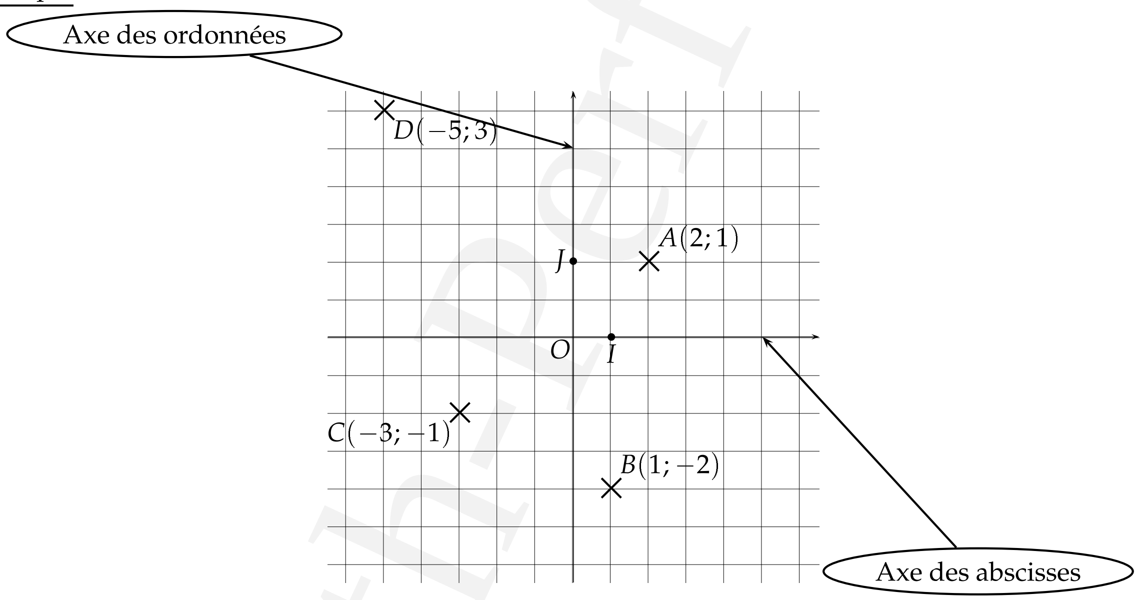
- O est l'origine du repère,
- la droite (OI) est l'axe des abscisses,
- la droite (OJ) est l'axe des ordonnées,
- la longueur OI définit l'unité sur l'axe des abscisses,
- la longueur OJ définit l'unité sur l'axe des ordonnées.

Dans le cas où les axes sont perpendiculaires, le repère est orthogonal.

Dans le cas où les axes sont perpendiculaires et les unités identiques, le repère est orthonormal ou orthonormé.

Les coordonnées d'un point sont constituées de deux nombres - une abscisse et une ordonnée - écrits entre parenthèses et separés par un point virgule.

Exemple



2. Coordonnées du milieu d'un segment

Formule

Soient $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$.
Soit K le milieu de $[AB]$.
Alors les coordonnées de K sont :

$$\boxed{\begin{cases} x_K = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_K = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}}$$

Math-Performance
Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

Exemple

Calcul des coordonnés du milieu K de $[AB]$, avec $A(5;7)$ et $B(8;11)$

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{5+8}{2} = \frac{13}{2}$$

$$y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{7+11}{2} = 9$$

Donc $K\left(\frac{13}{2};9\right)$

3. Longueur d'un segment

Formule

La formule suivante n'est applicable que dans un repère orthonormal.

Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$.

alors $\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$

Exemple

Calcul de la distance AB avec $A(5;-4)$ et $B(3;2)$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$
$$AB = \sqrt{(3-5)^2 + (2+4)^2}$$
$$AB = \sqrt{2^2 + 6^2}$$
$$AB = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = 2\sqrt{10}$$

4. Vecteurs

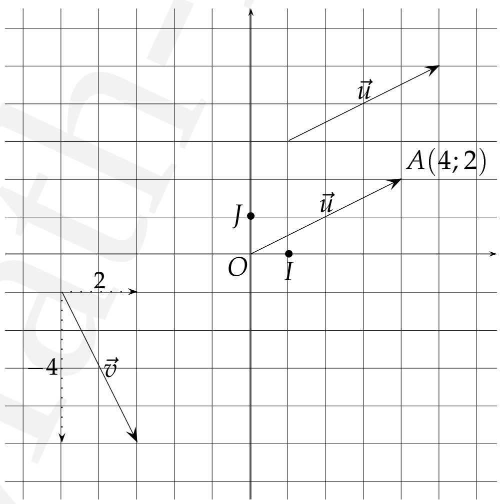
Définition

On considère un vecteur $\vec{u}$.
On construit l'image de O par la translation de vecteur $\vec{u}$, on obtient A.
Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont identiques à celles du point A.

On note : $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$

$x_{\vec{u}}$ est l'abscisse du vecteur $\vec{u}$.
$y_{\vec{u}}$ est l'ordonnée du vecteur $\vec{u}$.

Exemple



Sur notre exemple : $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

Remarque

On peut aussi interprêter les coordonnées d'un vecteur comme le déplacement relatif en abscisse et en ordonnée pour passer de l'origine à l'extrémité de sa représentation (voir $\vec{v}$ dans l'exemple précédent).

Vecteur défini par 2 points

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

alors $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}}$

Exemple

Calcul des coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ avec $A(2;1)$ et $B(7;3)$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 7-2 \\ 3-1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Somme de 2 vecteurs

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ \vec{v} \end{pmatrix}$

alors $\boxed{\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}} \end{pmatrix}}$

Exemple

Somme des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}} \end{pmatrix} \quad \vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} 4+5 \\ -3+2 \end{pmatrix} \quad \vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix}$

Vecteur opposé

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ alors $\boxed{-\vec{u}\begin{pmatrix} -x_{\vec{u}} \\ -y_{\vec{u}} \end{pmatrix}}$

Vecteur nul

Les coordonnées du vecteur nul sont $\boxed{\vec{0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

Translation

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $A(x_A; y_A)$

Soit A' l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$.
Les coordonnées de A' sont :

$$\boxed{\begin{cases} x_{A'} = x_A + x_{\vec{u}} \\ y_{A'} = y_A + y_{\vec{u}} \end{cases}}$$

Exemple

On prend $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $A(-1;5)$.

Calcul des coordonnées de l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$:

$$\begin{cases} x_{A'} = x_A + x_{\vec{u}} = -1+3 = 2 \\ y_{A'} = y_A + y_{\vec{u}} = 5+2 = 7 \end{cases}$$

D'où $A'(2;7)$

Math-Performance

Chapitre 9
Système d'équations

1. Introduction

Définition

Une équation à 2 inconnues est une égalité qui comporte 2 lettres
(en général x et y).

Trouver une solution de ce type d'équation c'est trouver une couple de nombres $(x; y)$ qui vérifie l'équation.

En général une telle équation a une infinité de couples solution.

Exemple

L'équation $x + y = 3$, est une équation à 2 inconnues.

Le couple $(1; 2)$ est une solution de l'équation, car quand on remplace x par 1 et y par 2 dans l'équation l'égalité est vérifiée.

De même, les couples $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ et $(-2; 5)$ sont des solutions de cette équation. On peut en trouver une infinité d'autres.

Système de 2 équations

Un système de 2 équations à 2 inconnues est «l'association» de 2 équations du type précédent.

Trouver un solution du système c'est trouver un couple de nombres $(x; y)$ qui vérifie à la fois les 2 équations.

En général (ce sera toujours le cas en 3°), un système admet un seul couple solution.

Exemple

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Le couple $(0; 3)$ vérifie la première équation mais pas la seconde donc $(0; 3)$ n'est pas solution du système.
En revanche $(2; 1)$ vérifie la première et la deuxième équation, c'est la solution du système.

2. Résolution d'un système

Méthode

Pour résoudre un système de 2 équations à 2 inconnues on utilise les 2 principes suivants :

1$^{\text{er}}$ principe

On peut multiplier (ou diviser) tous les termes d'une équation par un même nombre.

2$^{\text{ème}}$ principe

On peut additionner les 2 équations «terme à terme».

On utilise ces 2 principes pour se ramener à une équation à une inconnue que l'on sait résoudre.

Math-Performance
Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

Exemples

1. Résolution du système : $\begin{cases} x+y=3 & ① \\ 2x+y=5 & ② \end{cases}$

Multiplions ① par -2 : $\begin{cases} -2x-2y=-6 & ① \\ 2x+y=5 & ② \end{cases}$

Additionnons ① et ② : $-y=-1$ donc $y=1$

Remplaçons y par sa valeur dans ① : $x+1=3$ donc $x=3-1=2$

Le couple solution du système est $(2;1)$.

2. Résolution du système : $\begin{cases} 3x-2y=7 & ① \\ 5x+3y=10 & ② \end{cases}$

Multiplions ① par 3 et ② par 2 : $\begin{cases} 9x-6y=21 & ① \\ 10x+6y=20 & ② \end{cases}$

Additionnons ① et ② : $19x=41$ donc $x=\dfrac{41}{19}$.

Remplaçons x par sa valeur dans ① :

$3\times\dfrac{41}{19}-2y=7 \qquad \dfrac{123}{19}-2y=7 \qquad -2y=7-\dfrac{123}{19}$

$-2y=\dfrac{133}{19}-\dfrac{123}{19} \qquad -2y=\dfrac{10}{19}$

$$y=\frac{\frac{10}{19}}{-2}=-\frac{\overset{5}{\cancel{10}}}{19}\times\frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}}=\frac{-5}{19}$$

Donc le couple solution du système est $\left(\dfrac{41}{19};\dfrac{-5}{19}\right)$

3. Résolution de problèmes

En général on utilise les systèmes d'équations pour résoudre des problèmes à 2 inconnues.

Exemple

Un cirque propose deux tarifs d'entrée ; un pour les adultes et un pour les enfants.
Un groupe de trois enfants avec un adulte paie 44,50 .
Un autre groupe de 5 enfants avec quatre adultes paie 108 .

Quel est le prix d'une entrée pour un enfant et pour un adulte ?

Soit x le prix payé par un enfant et y celui payé par un adulte.

Mettons le problème en système d'équations :

$$\begin{cases} 3x+y=44{,}50 & ① \\ 5x+4y=108 & ② \end{cases}$$

Pour résoudre le système on multiplie ① par -4 :

$$\begin{cases} -12x-4y=-178 & ① \\ 5x+4y=108 & ② \end{cases}$$

Additionnons ① et ② :

$-7x=-70 \qquad x=\dfrac{-70}{-7}=10$

Math-Performance

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

Remplaçons x par sa valeur dans ① :

$3 \times 10 + y = 44{,}50 \qquad 30 + y = 44{,}50 \qquad y = 44{,}50 - 30 = 14{,}50$

Donc le couple solution de système est : $(10; 14{,}50)$

Le prix de l'entrée pour un enfant est de 10   et celui pour un adulte de 14,50 .

Math-Performance

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

Chapitre 10
Fonctions linéaires et affines

1. Rappel

Exemple

Dans un cinéma le prix d'une place est de 7 .
La somme gagnée par le cinéma en fonction du nombre de personnes est donnée par la relation :

$$S = 7 \times n$$

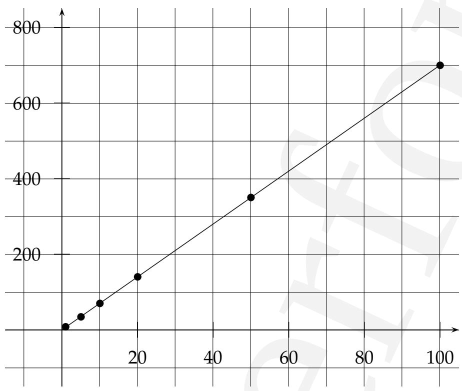
où S représente la somme gagnée et n le nombre de personnes.

Il s'agit d'une situation de proportionnalité, donc on peut faire un tableau de proportionnalité :

$\times 7$

Nombre	1	5	10	20	50	100
Somme	7	35	70	140	350	700

On peut représenter les données du tableau sur un graphique :



Comme c'est une situation de proportionnalité on obtient des points alignés avec l'origine du repère.

2. Fonction

Définition

Une fonction est une formule comportant une seule lettre (en général x), comme pour toute formule on peut calculer des valeurs de la fonction lorsque l'on donne des valeurs à x.

Exemple

On considère la fonction qui donne l'aire d'un carré de côté x, cette fonction peut s'écrire : $f(x) = x^2$.

Dans cette écriture f représente le nom de la fonction, x est la variable, l'écriture $f(x)$ qui se lit «f de x» signifie que la fonction utilise comme variable x dans sa «formule».

On peut calculer la valeur de la fonction pour différentes valeurs de x, par exemple : $f(3) = 3^2 = 9$

Dans cette écriture $f(3)$ se lit «f de 3» et représente le résultat obtenu lorsque l'on remplace x par 3 dans la formule.

On dit que par la fonction f, l'image de 3 est 9.

On dit que par la fonction f, l'antécédent de 9 est 3.

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

On peut aussi présenter la fonction de la façon suivante :

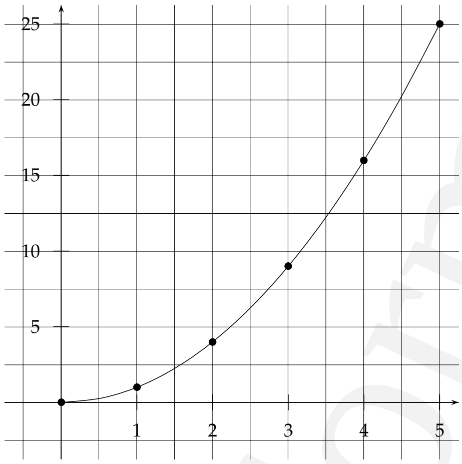
$$f : x \mapsto x^2$$

On dit que la fonction f est la fonction qui à x associe (fait correspondre) x^2.
Avec cette nouvelle notation on peut écrire : $f : 3 \mapsto 9$.

Lorsque l'on calcule plusieurs valeurs de la fonction on peut présenter les résultats dans un tableau :

x (côté du carré)	0	1	2	3	4	5
$f(x)$ (aire du carré)	0	1	4	9	16	25

A partir de ce tableau on peut effectuer une représentation graphique (chaque colonne du tableau correspond à un point du graphique).



En réalité la représentation graphique «complète» de la fonction
$f(x) = x^2$ est une courbe sur laquelle se trouvent bien sûr les points de notre tableau.

3. Fonction linéaire

Définition

Une fonction linéaire est une fonction de la forme :

$$f(x) = ax$$

où a est une valeur fixée numériquement.

Remarque

Une fonction linéaire correspond à une situation de proportionnalité. Par exemple la fonction $f(x) = 7x$ peut être associée à l'exemple du premier paragraphe. Dans ce cas x représente le nombre d'entrées et $f(x)$ la recette. Une écriture comme $f(5) = 35$ peut s'interpréter en disant que pour 5 entrées le cinéma gagne 35 .

Calcul de l'image

Soit $f : x \mapsto \frac{3}{4}x$.

Calcul de l'image de 7 par f :

On doit simplement calculer $f(7) = \frac{3}{4} \times 7 = \frac{21}{4}$

L'image de 7 par f est $\frac{21}{4}$

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

Calcul de l'antécédent

Soit $f(x) = 9x$.

Calcul de l'antécédent de 5 par la fonction f :

On cherche le nombre x, tel que $f(x) = 5$ ce qui donne :

$9x = 5 \qquad x = \dfrac{5}{9}$

L'antécédent de 5 par f est $\dfrac{5}{9}$.

Détermination de la fonction

Détermination de la fonction linéaire f, tel que $f(3) = 7$:

On cherche une fonction de la forme $f(x) = ax$, dans laquelle il faut déterminer a. Comme on sait que $f(3) = 7$ on peut écrire :

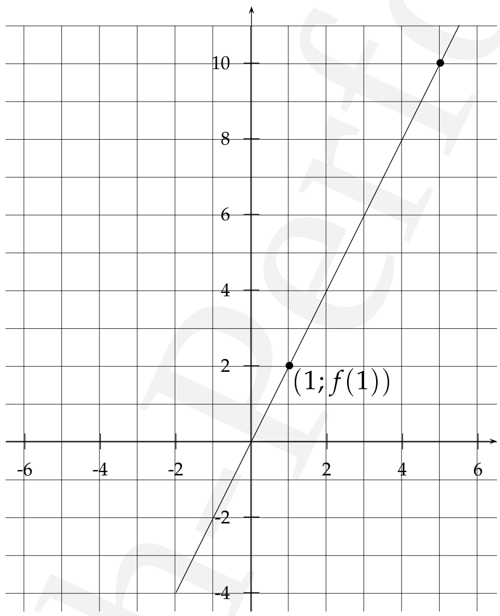
$f(3) = a \times 3 = 7$ donc : $3a = 7 \qquad a = \dfrac{7}{3}$

La fonction cherchée est $f(x) = \dfrac{7}{3}x$

Représentation graphique

Représentation graphique de la fonction $f(x) = 2x$.

Comme on l'a déjà remarqué, une fonction linéaire correspond à une situation de proportionnalité, donc la représentation graphique est une droite qui passe par l'origine du repère. Pour la tracer il suffit de connaître un point autre que l'origine, par exemple on peut calculer : $f(5) = 2 \times 5 = 10$, et on trace la droite qui passe par $(0{,}0)$ et $(5{,}10)$.



On dit que la représentation graphique de la fonction f est la droite d'équation $y = 2x$.

Le nombre 2 est le coefficient directeur de la droite.
Il correspond à la variation en ordonnée pour une variation de 1 en abscisse.

On peut utiliser le coefficient directeur pour représenter graphiquement «rapidement» une fonction linéaire (cela revient à placer le point $(1; f(1))$, dans notre exemple $(1; 2)$).

4. Fonction affine

Définition

Une fonction affine est une fonction de la forme :

$$f(x) = ax + b$$

où a et b sont fixés numériquement.

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

Calcul de l'image

Soit $f(x) = 3x - 2$ Calcul de l'image de 5 par f :

On calcule $f(5) = 3 \times 5 - 2 = 13$

L'image de 5 par f est 13.

Calcul de l'antécédent

Soit $g : x \mapsto -7x + 4$.

Calcul de l'antécédent de -2 par la fonction g :

On cherche x tel que $g(x) = -2$, donc on doit résoudre :

$-7x + 4 = -2 \qquad -7x = -2 - 4 \qquad -7x = -6 \qquad x = \dfrac{6}{7}$

L'antécédent de -2 par g est $\dfrac{6}{7}$

Détermination de la fonction

Détermination de la fonction affine h tel que :

$h(3) = 4$ et $h(2) = 5$

On cherche une fonction de la forme : $h(x) = ax + b$, dans laquelle il faut déterminer a et b.

Comme on sait que $h(3) = 4$, on peut écrire : $a \times 3 + b = 4$

Comme on sait que $h(3) = 5$, on peut écrire : $a \times 2 + b = 5$

On a donc le système d'équations : $\begin{cases} 3a + b = 4 & ① \\ 2a + b = 5 & ② \end{cases}$

<u>On multiplie ① par -1</u> : $\begin{cases} -3a - b = -4 & ① \\ 2a + b = 5 & ② \end{cases}$

<u>On additionne ① et ②</u> : $-a = 1$ donc $a = -1$

<u>On remplace a par sa valeur dans ②</u> :

$2 \times (-1) + b = 5 \qquad b = 5 + 2 = 7$

Donc la fonction affine cherchée est $h(x) = -x + 7$

Représentation graphique

Représentation graphique de la fonction $f(x) = 3x - 4$.

La fonction affine ne correspond pas à une situation de proportionnalité, mais sa représentation graphique est quand même une droite qui ne passe pas par l'origine du repère.

C'est la droite d'équation : $y = 3x - 4$.

Cette droite passe par le point $(0; f(0))$, dont on peut lire directement l'ordonnée sur la «formule» de la fonction (ou de la droite).

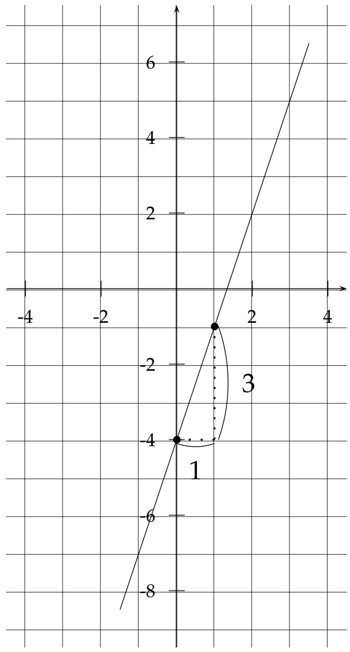
Pour $f(x) = 3x -4$, la droite passera par $(0; -4)$

Le nombre -4 s'appelle <u>l'ordonnée à l'origine</u> de la droite.

Pour tracer la droite on peut calculer les coordonnées d'un deuxième point ou utiliser son coefficient directeur qui est ici 3, à condition de raisonner depuis le point $(0; -4)$ considéré comme origine.

Math-Performance

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform



Math-Performance

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

Chapitre 11
Rotations-Angles

1. Rotation

Définition

Une rotation est définie par :

- un point : le centre de rotation,
- un angle,
- un sens de rotation (sens des aiguilles d'une montre ou le contraire)

L'image d'un point A dans la rotation de centre O d'angle $\alpha°$ dans un sens précisé est le point A' tel que :

$OA = OA' \qquad \text{mes}(\widehat{AOA'}) = \alpha°$

et quand on passe de A à A' on tourne dans le «bon sens».

Exemple

Sur le dessin ci-dessous, le point A' est l'image du point A dans la rotation de centre O et d'angle 45° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

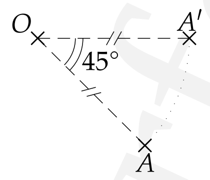
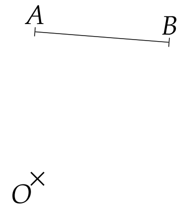


Image d'un segment

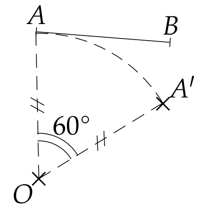
Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

Construire l'image d'un segment revient à construire l'image des deux extrémités du segment, par exemple :

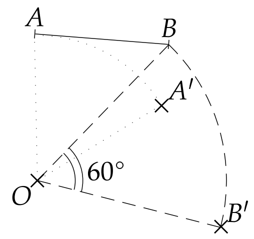
On veut construire l'image du segment $[AB]$ dans la rotation de centre O, d'angle $60°$ dans le sens des aiguilles d'une montre.



On commence par construire l'image de A dans cette rotation, on obtient A'.



Puis on construit l'image de B par la rotation. On obtient B'.



L'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$

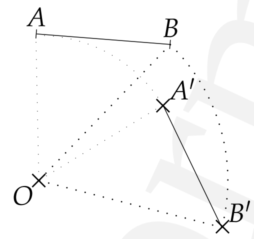
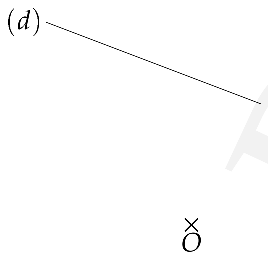


Image d'une droite

On procède comme pour le segment en choisissant deux points sur la droite, par exemple :

On veut construire l'image de la droite (d) dans la rotation de centre O, d'angle $90°$ dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.



On a choisit deux points A et B, dont on a tracé les images par la rotation. L'image de la droite (d) est la droite (d').

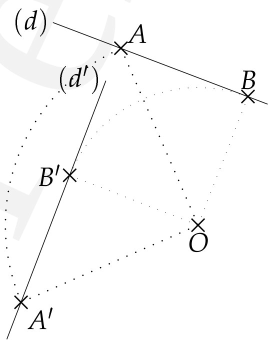
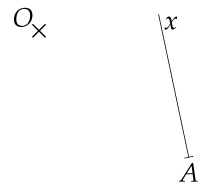


Image d'une demi-droite

Math-Performance
Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

On procède comme pour le segment et la droite, par exemple :

On veut construire l'image de la demi-droite $[Ax]$ par la rotation de centre O, d'angle 30° dans le sens des aiguille d'une montre.



On construit l'image de A et d'un autre point. L'image de la demi-droite $[Ax]$ est $[A'x']$.

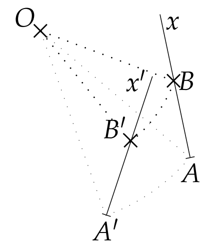
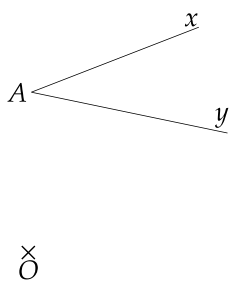


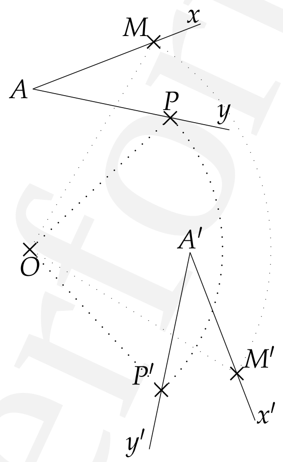
Image d'un angle

On construit l'image de chacune des demi-droites constituant l'angle, par exemple :

On veut construire l'image de l'angle $\widehat{xAy}$ dans la rotation de centre O, d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre.



On construit l'image de chacune des demi-droites $[Ax)$ et $[Ay)$. L'image de l'angle $\widehat{xAy}$ est l'angle $\widehat{x'A'y'}$

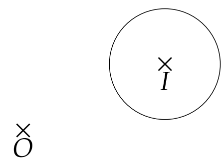


Math-Performance
Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

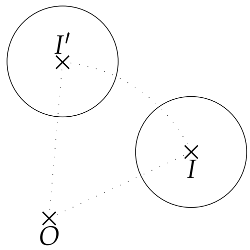
Image d'un cercle

Pour construire l'image d'un cercle dans une rotation il suffit de construire l'image de son centre. Le cercle image a le même rayon que le cercle de départ. Par exemple :

On veut construire l'image du cercle de centre I par la rotation de centre O, d'angle $60°$ dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.



On construit l'image de I, on obtient I'. L'image du cercle est le cercle de centre I' et de même rayon.



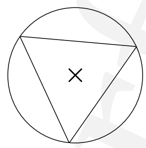
2. Polygones réguliers

Définition

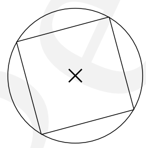
Un polygone régulier est un polygone dont tous les côtés ont la même longueur et que l'on peut inscrire dans un cercle.

Exemples

A 3 côtés : Le triangle équilatéral



A 4 côtés : Le carré



Cas général

Un polygone régulier à n côtés partage son cercle circonscrit en n secteurs angulaires de mesure $\frac{360}{n}$ degrés chacun.

Remarque

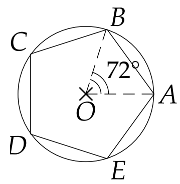
Si O est le centre du cercle circonscrit à un polygone régulier à n côtés on peut passer d'un sommet à un autre de ce polygone par une rotation de centre O et d'angle $\frac{360}{n}$ degrés.

Exemple

Math-Performance

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

Construction du pentagone : Un pentagone possède 5 côtés, donc il partage le cercle en 5 secteurs angulaires de $\dfrac{360}{5} = 72°$ chacun.

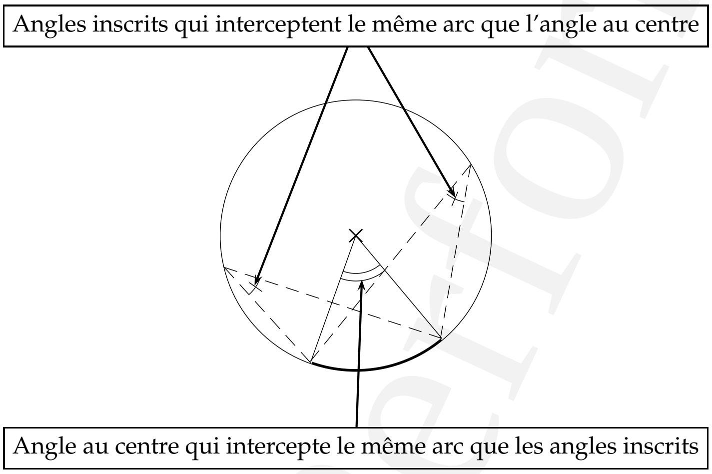


On peut passer de A à B, par la rotation de centre O, d'angle 72° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, on peut passer de A à D, par la rotation de centre O, d'angle 144° (72×2) dans le sens des aiguilles d'une montre, etc.

3. Angles inscrits et angle au centre

Vocabulaire

On s'intéresse aux angles qui interceptent un même arc dans un cercle.
On a le vocabulaire suivant :



Propriété

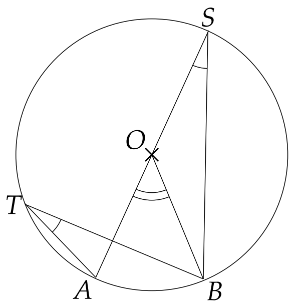
Dans un cercle

- tous les angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure,
- cette mesure est égale à la moitié de celle de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Exemple

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

On considère la situation représentée sur le dessin ci-dessous :



Les angles $\widehat{ATB}$ et $\widehat{ASB}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$, donc ils ont la même mesure.

Si de plus on donne, par exemple, $\text{mes}(\widehat{AOB}) = 50°$, alors on peut dire d'après la propriété précédente que :

$$\text{mes}(\widehat{ATB}) = \text{mes}(\widehat{ASB}) = \frac{50}{2} = 25°$$

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

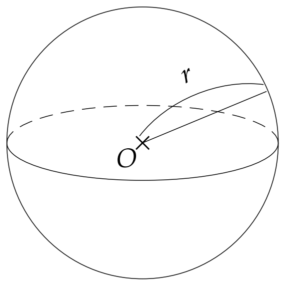
Chapitre 12
Géométrie dans l'espace

1. Sphère

Définition

La sphère de centre O et de rayon r est constituée des points de l'espace dont la distance à O est r.

Représentation en perspective :



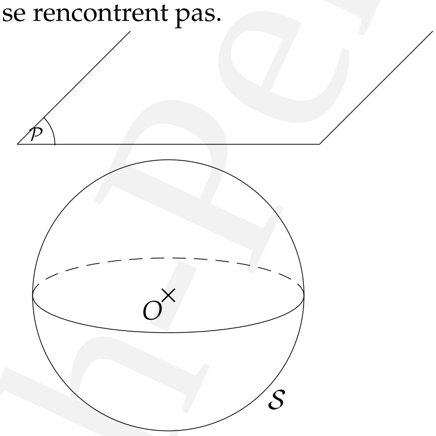
Aire : $\boxed{4\pi r^2}$

Volume : $\boxed{\dfrac{4}{3}\pi r^3}$

Section par un plan

On considère une sphère $\mathcal{S}$ de centre O et un plan $\mathcal{P}$ de l'espace.

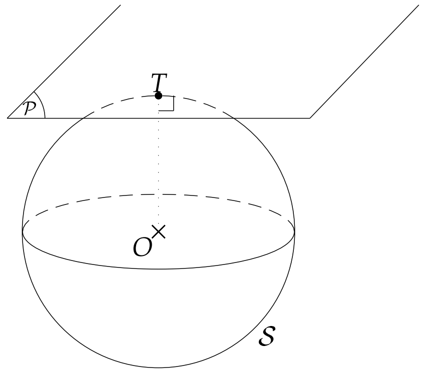
1^er^ cas : Le plan et la sphère ne se rencontrent pas.



Dans ce cas le plan et la sphère n'ont pas de point d'intersection.

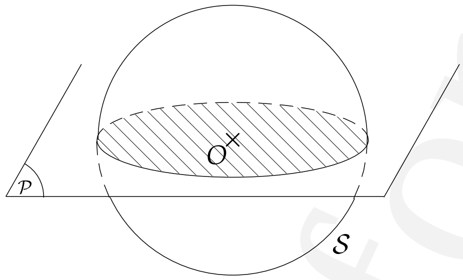
Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

$\underline{2^{\text{ème}}\text{ cas}}$: Le plan est tangent à la sphère.

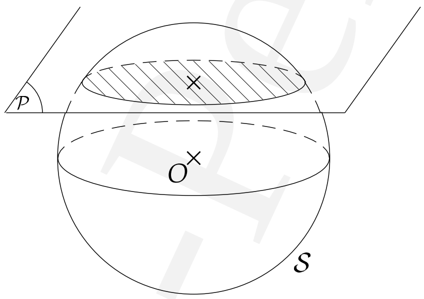


Dans ce cas le plan et la sphère ont un seul point d'intersection T et le rayon $[OT]$ est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

$\underline{3^{\text{ème}}\text{ cas}}$: Le plan coupe la sphère en passant par son centre.



Dans ce cas la section de la sphère par le plan est un cercle de même rayon que celui de la sphère. Un tel cercle s'appelle un «grand cercle». Le plan partage la sphère en deux demi-sphères.
$\underline{4^{\text{ème}}\text{ cas}}$: Le plan coupe la sphère sans passer par son centre.

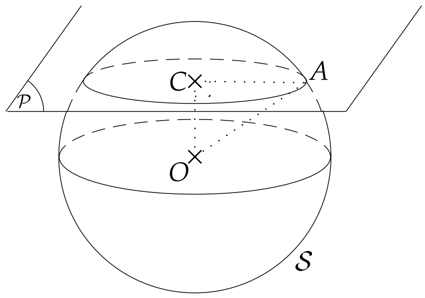


Dans ce cas la section de la sphère par le plan est un cercle de rayon inférieur à celui de la sphère. On peut calculer ce rayon en utilisant la propriété de Pythagore.

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

Exemple

On considère une sphère $\mathcal{S}$, de rayon 5 cm qui est coupée par un plan $\mathcal{P}$, à 2 cm de son centre O.
On appelle C, le centre du cercle-section, $[CA]$ est un rayon de ce cercle.



Dans le triangle OAC, rectangle en C, on a d'après la relation de Pythagore :
$AC^2 = OA^2 - OC^2$
$AC^2 = 5^2 - 2^2 = 21$
$AC = \sqrt{21} \simeq 4{,}6$ cm.

2. Agrandissement/Réduction

Définition

Quand on agrandit ou réduit un «objet» sans déformation, on multiplie toutes ses dimensions par un nombre k.

- Dans un agrandissement k est supérieur à 1.
- Dans une réduction k est compris entre 0 et 1,
  par exemple : $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{100}$; etc. Ce qui revient, en général, à diviser les dimensions par un nombre entier.

Propriété

Lorsque les longueurs d'un «objet» sont multipliées (divisées) par k,
- son aire est multipliée (divisée) par k^2,
- son volume est multiplié (divisé) par k^3.

Exemples

1. On considère un rectangle de largeur 3 cm et de longueur 4 cm.
Son aire est de $3 \times 4 = 12$ cm^2.
Si on l'agrandit en multipliant ses dimensions par 7, on obtient un rectangle de 21 cm de large par 28 cm de long.
L'aire du rectangle agrandi est $21 \times 28 = 588$ cm^2
On peut vérifier que l'aire de départ a été multipliée par $7^2 = 49$:
$12 \times 49 = 588$.

2. On considère un pavé droit de dimensions 2 cm; 3 cm et 4 cm.
Son volume est de $2 \times 3 \times 4 = 24$ cm^3
Si on le réduit en multipliant ses dimensions par $\frac{1}{10}$, on obtient un pavé droit de dimensions 0,2 cm; 0,3 cm et 0,4 cm.
Le volume du pavé réduit est $0{,}2 \times 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}024$ cm^3.

Math-Performance

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

On peut vérifier que le volume de départ a été multiplié par
$\left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1000}$, en effet : $24 \times \frac{1}{1000} = 0{,}024$
Ce qui revient à dire que quand on divise les dimensions par 10, le volume est divisé par $10^3 = 1000$.

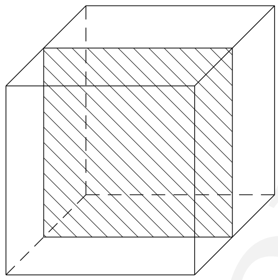
3. Sections planes de solides

Pavé droit-Cube

La section d'un cube ou d'un pavé droit par un plan parallèle à une face ou une arête est un rectangle (qui peut-être un carré dans certains cas).

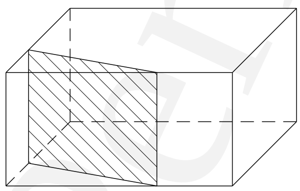
Exemples

1. Section d'un cube par un plan parallèle à une face.



Dans ce cas on obtient toujours une section carrée.

2. Section d'un pavé droit par un plan parallèle à une arête.



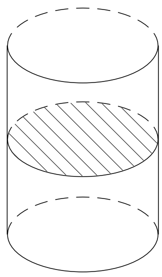
Cylindre

- La section d'un cylindre par un plan parallèle à sa base est un cercle de même rayon que la base.
- La section d'un cylindre par un plan parallèle à son axe est un rectangle.

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

Exemples

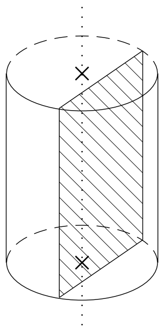
1. Section d'un cylindre par un plan parallèle à sa base



2. Section d'un cylindre par un plan parallèle à son axe.

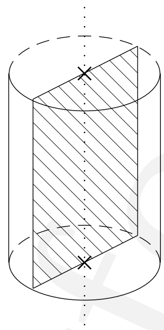
Le plan ne passe pas par l'axe du cylindre

Un des côtés du rectangle mesure la hauteur du cylindre et l'autre côté mesure moins que le diamètre de base du cylindre.



Le plan passe par l'axe du cylindre

Un des côtés du rectangle mesure la hauteur du cylindre et l'autre côté mesure le diamètre de base du cylindre.

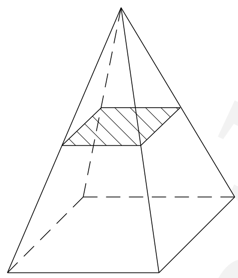


Pyramide-Cône

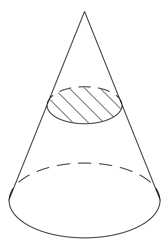
La section d'une pyramide ou d'un cône par un plan parallèle à sa base est une réduction de sa base. De plus le plan partage la pyramide (le cône) en deux solides : un tronc de pyramide (de cône) et une réduction de la pyramide (du cône) de départ.

Exemples

Section d'une pyramide



Section d'un cône



Remarque

Dans le cas de la pyramide et du cône, on peut utiliser les principes d'agrandissement/réduction expliqués dans le paragraphe 2.

Math-Performance

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

Chapitre 13
Statistiques

1. Exemple

Dans une région on a demandé aux patrons de 34 entreprises créatrices d'emplois le nombre de salariés embauchés ces deux dernières années.
Les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau suivant :

Emplois créés	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Effectifs	4	1	2	3	2	1	2	4	6	3	3	3

Dans cette étude statistique :

- La population est l'ensemble des entreprises étudiées.
- Le caractère étudié est «le nombre d'emplois créés ces deux dernières années», ce caractère s'exprime par une valeur numérique, c'est donc un caractère quantitatif.
- Les valeurs prises par le caractère (entiers de 2 à 13) sont rangées dans l'ordre croissant dans le tableau des effectifs.

2. Etendue

Définition

L'étendue d'une série statistique est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur du caractère.

Exemple

Dans le cas de l'exemple du premier paragraphe :

- Nombre minimum d'emplois créés : 2
- Nombre maximum d'emplois créés : 13

L'étendue de la série statistique est : $13 - 2 = 11$

Remarque

L'étendue n'a de sens que pour un caractère quantitatif.

3. Médiane

Définition

La médiane d'une série statistique est une valeur du caractère qui permet de partager la série en 2 groupes de même effectif.

En général on utilise les effectifs cumulés (croissants ou décroissants) pour trouver la médiane.

Exemple

Dans le cas de l'exemple du premier paragraphe, les valeurs du caractère sont rangées dans l'ordre croissant donc on va utiliser les effectifs cumulés croissants.

Emplois créés	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Effectifs	4	1	2	3	2	1	2	4	6	3	3	3
Effectifs cumulés croissants	4	5	7	10	12	13	15	19	25	28	31	34

On cherche à partager la série statistique en deux groupes de
$34 \div 2 = 17$ entreprises.

L'étude des effectifs cumulés montre que 15 entreprises ont embauché au plus 8 salariés et que 19 entreprises ont embauché au plus 9 salariés.

Ce qui signifie que 17 entreprises ont embauché 9 salariés ou moins et 17 entreprises ont embauché 9 salariés ou plus. Donc la valeur médiane de la série statistique est 9.

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform

Math-Performance

Math-Performance -- Math-Performance -- Math-Perform